数理解析研究所講究録
第 728 巻 1990 年 115-125

Tree を使う Priority Method

名古屋大学　　青木邦匡

recursively enumerable (以下 r.e.) degrees の構成において様々な priority method が使用されてきている. Friedberg-Muchnik による incomparable r.e. degrees の構成では finite injury priority($\mathbf{0}'$-priority) が, Sacks の Density Theorem や Lachlan-Yates の minimal pair の構成では infinite injury priority($\mathbf{0}''$-priority) が使われている. そして, Lachlan の "monster paper" や, Harrington-Shelah による r.e. degrees の undecidability の証明では, 前の二つよりも更に複雑な $\mathbf{0}'''$-priority を使って証明がなされている.

今回は $\mathbf{0}'''$-priority argument を必要とする証明で用いられる tree を使う構成によって, 実際に Friedberg-Muchnik の定理を証明してみる. 更に, それを利用して high degree と minimal pair をなす r.e. degree についての考察を行なう.

以下, 集合や関数はすべて $\omega = \{0, 1, 2, \cdots\}$ 上で考える. 集合 A とその特性関数 χ_A を同一視して, $A(x)$ は $\chi_A(x)$ のこととする. $f \upharpoonright x$ は $y < x$ の元に f を制限することであり, $A \upharpoonright x$ は $\chi_A \upharpoonright x$ のこととする. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\omega \times \omega$ から ω への上への一対一の 標準的な recursive pairing function とする. $A \subseteq \omega$ に対して, $A^{[y]} = \{\langle x, z\rangle : \langle x, z\rangle \in A \ \& \ z = y\}$ と決め, これを A の y-section と呼ぶ. $\{e\}^A_s(x)\downarrow = y$ は, A を oracle とする e 番目の recursive partial functional に x を入力したとき, s steps 以内に計算が終了し, その出力が y であることを表す. $\{e\}^A_s(x)\uparrow$ は計算が終了しなかったことを表す. $\{e\}^A_s(x)\downarrow = y$のとき, $u(A; e, x, s)$ はその計算で使われた最大の数に 1 を加えたものとする. このとき, $x, y, u(A; e, x, s) \leq s$ となっている. A_s は stage s の終りまでに A に数え入れられたものすべてのこととする. $\Lambda^{<\omega}$ は Λ の finite sequences の集合とする.

§1. 従来の INCOMPARABLE DEGREES の構成

定理 1.1 (Friedberg-Muchnik)　　次の条件を満たす二つの r.e. 集合 A, B が存在する.

$$A \not\leq_T B \quad \text{かつ} \quad B \not\leq_T A \quad (\text{したがって } \emptyset <_T A,\, B <_T \emptyset')$$

証明　　全ての e について, 次の requirement をみたすように, A,B を構成していく.

$$R_{2e} : A \neq \{e\}^B\ , \qquad R_{2e+1} : B \neq \{e\}^A$$

R_{2e} を満たすための基本的手順として, まず A にまだ入れられていない $x \in \omega^{[2e]}$ を考えて, $\{e\}^{B_s}_s(x)\downarrow = 0$ となる stage $s+1$ を待つ. ($\{e\}^{B_s}_s\downarrow = 0$ とならなければ, $\{e\}^{B_s}_s\uparrow$ であっても $\{e\}^{B_s}_s\downarrow = 1$ であっても, R_{2e} は満たされる.) そのような stage $s+1$ があれば, R_{2e} は stage $s+1$ で attention を要

するという. R_{2e} が attention を受けるとき, (1) x を A にいれる, (2) 制限関数 $r(2e,s+1)=s+1$ と決める. これは, $y \le r = u(B_s;e,x,s)$ となる元を B に入れないようにして現在の計算を守るための関数である. つまり,

$$\{e\}^B(x) = \{e\}^{B\restriction r}(x) = \{e\}^{B_s\restriction r}(x) = 0$$

となるようにしている. このとき $A(x)=1$ となるから R_{2e} は満たされる. R_{2e+1} も A と B を入れかえるだけで同様である.

全ての requirement を一斉に満たすために, A , B に入れる元の候補 $x(e)$ を '有限回' ではあるけれど変えなければならない. そこで R_e を満たすために A 又は B に入れる元の stage s の終りでの値を $x(e,s+1)$ と決める. 逆に, $x(e)$ を $\lim_s x(e,s)$ を表すことにしておく. 異なる requirement には異なる元が対応するように $x(e,s) \in \omega^{[e]}$ とする. 次に R_e が stage $s+1$ で attention を受けた場合, e より大きい全ての i について $x(i,s)$ を cancell して新しく, $y > r = r(e,s)$ となるように $y = x(i,s+1)$ を決める. R_i が R_e より高い priority をもつとき ($i<e$ のとき) に, R_i のために $x(i,s+1)$ を A か B に入れることを, R_e を injure するという. R_i ($i<e$) がすべて attention を受けなくなった後, R_e は高々一度しか attention を受けず, それ以後はずっと満たされ続ける.

R_eを, stage s で初期化するとは, $x(e,s-1)$ を 放棄し ($s>0$),

$$x(e,s) = \mu y[y \in \omega^{[e]} \ \ \& \ \ y > s \ \ \& \ \ y \notin A_s \cup B_s \ \ \& \ \ y > x(e,s-1)]$$

として, $r(e,s) = -1$ と決め直すことである.

<u>構成</u>

stage $s=0$ 　$A_0 = B_0 = \emptyset$ とし, すべての e について R_e を初期化する.

stage $s+1$ 　R_{2e} が attention を要するとは,

$$\{e\}_s^{B_s}(x(2e,s)) \downarrow = 0 \qquad \& \qquad r(2e,s) = -1$$

のときをいう. R_{2e+1} も A と B を変えただけで同様である. まず, attention を受ける R_i で $i \le s$ となる最小のものを選ぶ. もし存在したならば, R_i は attention を受けた, 又は act したといい, (1) $r(i,s+1) = s+1$ とし, (2) $x(i,s)$ を, i が偶数ならば A に, 奇数ならば B に入れる, (3) すべての $k > i$ に対して, R_k を初期化する, (4) すべての $k < i$ に対しては何も変えずにそのままにしておく. そのような i が見つからなければ, なにもせずに次の stage へ進む.

<u>補題</u>　全ての i について requirement R_i は, 有限回しか injure されず, 必ず満たされる.

<u>証明</u>　i についての帰納法で示す. 全ての $j < i$ で満たされていると仮定する. まず, 全ての $R_j, (j<i)$ が, それ以後二度と attention を受けないような stage のうち最小のものを s とする. すると,

$$r(i,s+1) = -1 \qquad \& \qquad (\forall t \ge s)[x(i,t) = x(i,s) = x(i)]$$

となっている. $i=2e$ とする ($i=2e+1$ のときも同様であるので省略する). R_{2e} が stage $t+1>s$ で attention を受けたとすれば,

$$\{e\}_t^{B_t}(x(2e))=0 \quad , \quad x(2e)\in A_{t+1}-A_t \quad , \quad B_t\restriction t=B\restriction t$$

であるから

$$\{e\}^B(x(2e))=0\neq A(x(2e))=1$$

となっており, この場合 R_{2e} は stage $t+1$ 以後二度と attention を受けない. R_{2e} が stage s 以後一度も attention を受けない場合も

$$\{e\}^B(x(2e))\neq A(x(2e))$$

であるのでいずれの場合にしても R_{2e} はずっと満たされ続ける. 証明終

§2. TREE を使う INCOMPARABLE DEGREES の構成

まず, tree に関する順序の定義を行う. Λ を線型順序 $<_\Lambda$ を持つ可算集合とし, この Λ に対して T を tree $\Lambda^{<\omega}$ とする. $\alpha,\beta,\gamma\cdots$ は T の元で, $f,g,\cdots$ は Λ^ω の元とする. $|\alpha|$ は α の長さとし, $\alpha\subseteq\beta$ は β が α の拡張であることとする.

<u>定義 2.1</u>　$\alpha,\beta\in T$ とする.
(1) α が β の左にある ($\alpha<_L\beta$)
$$\iff (\exists a,b\in\Lambda)(\exists\gamma\in T)[\gamma\hat{}\langle a\rangle\subseteq\alpha \ \& \ \gamma\hat{}\langle b\rangle\subseteq\beta \ \& \ a<_\Lambda b]$$
(2) $\alpha\leq\beta \iff \alpha<_L\beta$ or $\alpha\subseteq\beta$
(3) $\alpha<\beta \iff \alpha\leq\beta \ \& \ \alpha\neq\beta$

<u>定理 1.1 の証明 (tree version)</u>　ここでは $\Lambda=\{0,1\}$ と $T=2^{<\omega}$ を固定して考える. 各 $\alpha\in T$ について $|\alpha|=i$ のとき, R_i を満たすように α に対する基本となる手順を考えてみる. まず, A 又は B に入れる元の候補として $x(\alpha)$, 制限として $r(\alpha)$ を各 α について定めて, stage s の終わりでの値をそれぞれ $x(\alpha,s), r(\alpha,s)$ とする. $|\alpha|=2e$ のとき α が attention を要するのは,

$$\{e\}_s^{B_s}(x(\alpha,s))\downarrow=0 \quad \& \quad r(\alpha,s)=-1$$

が成り立つときとする ($|\alpha|=2e+1$ のときも A_s と B_s を入れかえるだけで同様である). stage $s+1$ で α が attention を要し, "正しい推測をしている" とき attention を受けて, つまり act して, そのとき $|\alpha|=2e$ ならば $x(\alpha,s)$ を A に, $|\alpha|=2e+1$ ならば B に入れ, $r(\alpha,s+1)=s+1$ とし, 全ての $\beta>\alpha$ について初期化を行なう. 前の構成とこの tree を使う構成との差として考えられるのは, 前は R_{2e} が 2^e 回 act するかもしれなかったのに対し, この構成では長さ e の元 2^e 個が高々一回し

か act しない．というのは，各元に対する requirement が“正しく推測している”ときしか act しないためである．

各 requirement R_e は，次に定義する true path と呼ばれる $f \in 2^\omega$ に対して，$\alpha = f \upharpoonright e$ という唯一の元が“正しい推測をし”それによって満たされていることがわかる．

<u>定義 2.2</u>　　true path $f \in 2^\omega$ を次のように n について帰納的に定義する．$\alpha = f \upharpoonright n$ が与えられているとする．

$$f(n) \stackrel{def}{=} \begin{cases} 0, & \text{if } (\exists s)[R_\alpha \text{ が stage } s \text{ で act する}] \\ 1, & \text{otherwize} \end{cases}$$

こう決めた f は recursive ではないが明らかに $f \leq_T \emptyset'$ になっており，実際，次に定義する recursive sequence $\{\delta_s : s \in \omega\}$ によって $f(n) = \lim_s \delta_s(n)$ となっていることがわかる．

<u>定義 2.3</u>　　$|\delta_s| = s$ を $n < s$ について帰納的に定義する．$\alpha = \delta_s \upharpoonright n$ が与えられ，$n < s$ であるとする．

$$\delta_s(n) \stackrel{def}{=} \begin{cases} 0, & \text{if } (\exists t \leq s)[R_\alpha \text{が stage } t \text{ で act する．}] \\ 1, & \text{otherwize} \end{cases}$$

ここで各 n について

$$\delta_s \upharpoonright n \not<_L \delta_{s+1} \upharpoonright n$$

となっていることがわかる．つまり $\delta_{s+1} \upharpoonright n$ は $\delta_s \upharpoonright n$ の右になることはない．したがって $\lim_s \delta_s(n)$ は存在して $f(n)$ と等しくなる．

各 $\alpha \in T$ が $\beta \subset \alpha$ に行う推測とは，$\beta = \alpha \upharpoonright k$ が act するかどうかを $\alpha(k) = 0$ かどうかで推測することである．$\alpha \subseteq \delta_s$ なら stage $s+1$ で α は“正しく推測する”と考えられて α は stage $s+1$ で実際に act する候補となる．

stage s で α を初期化するとは，$r(\alpha, s) = -1$ とし，$x(\alpha, s)$ を $y \in \omega^{[\alpha]}, y \notin A_s \cup B_s, y > \max\{x(\alpha, t) : t < s\}$ を満たす最小の y と決めることとする．ただし，T の適当な effective な code による α に対する code を n としたとき，$\omega^{[\alpha]} = \omega^{[n]}$ であるとする．

<u>構成</u>

stage $s = 0$　　$A_0 = B_0 = \emptyset$ とし，すべての $\alpha \in T$ を初期化する．

stage $s+1$　　attention を要する $\gamma \subseteq \delta_s$ で $\subseteq$-minimal なものを α とする．このとき α は act するといい，$r(\alpha, s+1) = s+1$ にし $x(\alpha, s)$ を $|\alpha|$ が偶数ならば A に，奇数ならば B に入れる．更にすべての $\gamma > \alpha$ を初期化する．

<u>補題</u>　　すべての i について $\alpha = f \upharpoonright i$ が R_i を満たしている．

<u>証明</u>　　i についての帰納法で証明する．i を固定して，$\alpha = f \upharpoonright i$ と決めて，すべての $j < i$ で成り立っていると仮定する．

まず，すべての $t \geq s$ で $\alpha \subseteq \delta_t$ となる最小の s を選ぶ．このとき，$r(\alpha, s) = -1$ であり，α は stage $s+1$ 以降二度と 初期化されない．そこで $x = \lim_t x(\alpha, t) = x(\alpha, s)$ とおく．

$i = 2e$ とする．($i = 2e+1$ の場合も全く同様である．) α が stage $s+1$ 以降 act しないとすると，$\{e\}^B(x) \neq 0$ である．一方，α が stage $t > s$ で act するときは，

$$\{e\}_t^{B\restriction t}(x) = 0 \quad , \quad A_t(x) = 1$$

となっている．すべての $\beta > \alpha$ について $x(\beta, t) > t$ となり，$y \leq t$ を A 又は B に入れることによって α を injure するような $\beta > \alpha$ はない．更に，$\beta < \alpha$ なら $\alpha \subset f$ だから β は stage $t+1$ 以降 act することはない．いずれの場合にしても

$$\{e\}^B(x) \neq A(x)$$

となり，requirement R_i は満たされる．　　　　　　　　　　証明終

§3. High degree と Minimal Pair

まず始めに，$F : \omega \to \{\langle x, e\rangle : x \in W_e\}$ となる一対一帰納的関数を固定して新たに W_e の帰納的な数え上げを定義する．

$$W_{e,s} = \{x : (\exists t \leq s)[F(t) = \langle x, e\rangle]\}$$

$W_{e,\mathrm{at}\,s} = W_{e,s} - W_{e,s-1}$ と決める，つまり $x \in W_{e,\mathrm{at}\,s}$ とは $F(s) = \langle x, e\rangle$ となることである．したがってこの数え上げでは，stage s ではただ1つの W_e にただ一つの元が入れられることになる．

<u>補題 3.1</u>　$\{U_{e,s} : e, s \in \omega\}$ が帰納的な列 であって，$U_{e,s} \subseteq U_{e,s+1}$ を満たし，$U_e = \bigcup_s U_{e,s}$ であるとする．このとき次の条件を満たす帰納的関数 g が存在する．

$$(\forall e)[W_{g(e)} = U_e \;\&\; W_{g(e),s} \cap U_{e,\mathrm{at}\,s} = \emptyset]$$

<u>証明</u>　帰納定理から

$$W_{g(e)} = \{x : (\exists s)[x \in U_{e,s} - W_{g(e),s}]\}$$

となる関数 g をとればよい．

r.e. degrees の代数的な構造を考える上で重要な次のような集合を定義する．

<u>定義 3.2</u>　r.e. 集合 A と A の帰納的な数え上げ $\{A_s\}_{s\in\omega}$ に対して A が promptly simple 集合であるとは，A の補集合が無限集合であって次の条件を満たす帰納的関数が存在することとする．

(3.1) $$(\forall e)[W_e : \text{無限集合} \Rightarrow (\exists x)(\exists s)[x \in W_{e,\mathrm{at}\,s} \cap A_{p(s)}]]$$

r.e. degree **a** が promptly simple degree であるとは, **a** が promptly simple 集合を含むこととし, promptly simple degree 全体を **PS** と書くことにする.

promptly simple degree を持つ r.e. 集合は必ずしも promptly simple 集合とはかぎらないが, 次の定理で述べる性質を共通して持っている.

定理 3.3　r.e. 集合 A と A の帰納的な数え上げ $\{A_s\}_{s\in\omega}$ に対して, A が promptly simple degree を持つことと, 次の条件を満たす単調増加な一対一帰納的関数 p が存在することとは同値である.

(3.2) $$(\forall e)[W_e : \text{無限集合} \Rightarrow (\exists x)(\exists s)[x \in W_{e,\mathrm{at}\,s} \ \&\ A_s \restriction x \neq A_{p(s)} \restriction x]]$$

証明　($\Rightarrow$) $B = \{e\}^A$ となる promptly simple 集合をとり, (3.1) を満たす帰納的関数 q と B の帰納的な数え上げ $\{B_s\}_{s\in\omega}$ を固定する. (3.2) を満たす関数 p とともに, 帰納的な列 $\{U_{i,s} : i, s \in \omega\}$ も同時に構成していく.

構成
stage $s = 0$　$p(0) = 0$ とおき, すべての i について $U_{i,0} = \emptyset$ とする.
stage $s + 1$　$x \in W_{i,\mathrm{at}\,s}$ となる唯一の x, s をとる. W_i が (3.2) を満たしておらず,

$$y \notin B_{s+1} \cup U_{i,s} \ \&\ \{e\}_{s+1}^{A_{s+1}}(y) \downarrow= 0 \ \&\ u(A_{s+1}; e, y, s+1) < x$$

を満たす y が存在するならば, 最小の y をとり $U_{i,s+1}$ に入れる. さらに, $y \in W_{g(i),t}$ となる最小の t をとる. ここで, $W_{g(i)}$ は補題 3.1 を $\{U_{i,s} : i, s \in \omega\}$ に適用して得られるものとする. そこで,

$$p(s+1) = (\mu v \geq t)[B_v(y) = \{e\}_v^{A_v}(y)]$$

とおけばよい.

こうして決めた関数 p が (3.2) を満たしていることを示す. 今, W_i が無限集合であるにもかかわらず, (3.2) が満たされていないと仮定する. B の補集合は無限集合だから, $U_i = \bigcup_s U_{i,s}$ もやはり無限集合になる. B が promptly simple 集合であるから, $y \in W_{g(i),\mathrm{at}\,t} \cap B_{q(t)}$ となる y が存在する. したがって,

$$y \in U_{i,s} \ \&\ \{e\}_s^{A_s}(y) = B_s(y) = 0$$

を満たす t 未満の s が存在する. すると, $y \in B_{q(t)} - B_s$ であることから, $A_s \restriction u \neq A_{p(s)} \restriction u$ が成り立つ. ただし, $u = u(A_s; e, y, s)$ とする. y が U_i に入れれられるためには $x \in W_{i,\mathrm{at}\,s}$ となる u より大きい x が必要であるから, W_i についても (3.2) が満たされることがわかる.

($\Leftarrow$) (3.2) を満たす関数 p を固定して考えて，$B \equiv_T A$ となる promptly simple 集合 B を構成していく．

すべての e について次の条件を満たすようにする．

$$P_e \quad : \quad W_e : \text{無限集合} \Rightarrow (\exists x)(\exists s)[x \in W_{e,\text{at }s} \cap B_s]$$

つまり B は恒等関数によって promptly simple 集合であることが示されるようにする．

構成

stage $s = 0$　$B_0 = \emptyset$ とする．

stage $s+1$　$\overline{B_s} = \{b_0^s < b_1^s < \cdots\}$ とする．

step 1　$x \in W_{e,\text{at }s}$ となる唯一の x, e をとる．$x > b_e^s$ であって，P_e がまだ満たされてなく，さらに $A_s \upharpoonright x \neq A_{p(s)} \upharpoonright x$ が成り立つならば，x を B に入れる．

step 2　$x \in A_{s+1} - A_s$ ならば b_x^s を B に入れる．

こうして作られた B が promptly simple 集合で $B \equiv_T A$ となっていることを示す．
$x \in B_s - B_{s-1}$ ならば $A_s \upharpoonright x \neq A_{s-1} \upharpoonright x$ であるから $B \leq_T A$ が成り立つ．逆に，$b_x = \lim_s b_x^s$ として $B_s \upharpoonright (b_x+1) = B \upharpoonright (b_x+1)$ ならば $x \in A$ と $x \in A_s$ とは同値であるから $A \leq_T B$ が成り立ち $B \equiv_T A$ が示される．最後に，W_e が無限集合ならば B の構成方法より必ず P_e は満たされる．したがって B は promptly simple 集合になる．

tree を使う構成によって high degree と minimal pair をなす degree と promptly simple degree との関係が次のようにわかる．

定理 3.4　$\mathbf{b}$ が r.e. degree ならば，$\mathbf{b}$ は promptly simple degree であるか，ある high degree $\mathbf{a}$ と minimal pair をなす．

証明　r.e. 集合 $B \in \mathbf{b}$ と B の帰納的な数え上げ $\{B_s\}_{s\in\omega}$ を固定する．

証明に必要な tree として次のようなものを考える．

$$T = \{\alpha : \alpha \in \omega^{<\omega} \quad \& \quad (\forall i)[\alpha(2i+1) \in \{0,1\}]\}$$

次に二つの帰納的関数を定義する．これは A と B が minimal pair をなすかどうかを評価する関数である．($|\alpha| = 2e$ とする．)

$$l(\alpha,s) \stackrel{def}{=} \max\{x : (\forall y < x)[\{e\}_s^{A_s}(y)\downarrow = \{e\}_s^{B_s}(y) \quad \& \quad \{e\}_s^{A_s}(y) \text{ は } \alpha\text{-correct である．}]\}$$
$$m(\alpha,s) \stackrel{def}{=} \max\{l(\alpha,s) : t \leq s \quad \& \quad t \text{ は } \alpha\text{-stage である．}\}$$

ここで $\{e\}_s^{A_s}(y)$ が α-correct であるとは，

$$(\forall i < e)[\alpha(2i+1) = 0 \Rightarrow (\forall z)[\alpha(2i) < z \leq u(A_s; e, y, s) \ \ \& \ \ z \in \omega^{[i]} \Rightarrow [z \in A_s^{[i]}]]]$$

が成り立つときをいう．t が α-stage であるとは，$\alpha \subseteq \delta_s$ となるときをいう．δ_s については後で定義する．stage s が e-expansionary とは，$s = 0$ であるか s が α-stage であって $l(\alpha, s) > m(\alpha, s)$ となる $|\alpha| = 2e$ が存在するときのこととする．

A を high degree にするために次のような r.e. 集合 C を考える．

$$e \in \emptyset'' \Rightarrow C^{[e]} : \text{有限集合}$$
$$e \notin \emptyset'' \Rightarrow C^{[e]} = \omega^{[e]}$$

この C に対してすべての e について $C^{[e]} =^* A^{[e]}$ が成り立てば A は high になる．なぜなら，

$$\lim_x (A(\langle x, e \rangle)) = 0 \Rightarrow C^{[e]} : \text{有限集合} \ \Rightarrow e \in \emptyset''$$
$$\lim_x (A(\langle x, e \rangle)) = 1 \Rightarrow C^{[e]} = \omega^{[e]} \Rightarrow e \notin \emptyset''$$

となって $\emptyset'' \leq_T A'$ が成り立ち $A \leq_T \emptyset'$ であることから A が high であることがわかる．したがって，次のような条件を満たすように構成すればよい．

$$P_e \quad : \quad A^{[e]} =^* C^{[e]}$$
$$N_e \quad : \quad \{e\}^A = \{e\}^B = f : \text{全域的} \Rightarrow f : \text{帰納的}$$

B が promptly simple degree を持つかどうかを評価するために関数 p_α を作り次の条件を考える．($|\alpha| = 2e$ とする．)

$$R_{\alpha,i} \quad : \quad W_i : \text{無限集合} \Rightarrow (\exists x)(\exists s)[x \in W_{i,\text{at } s} \ \ \& \ \ B_s \upharpoonright x \neq B_{p_\alpha(s)} \upharpoonright x]$$

$|\alpha| = 2e$ のとき二つの条件 N_e と $R_{\alpha,i}$ をまとめて次のような条件にする．

$$R_\alpha \quad : \quad N_e \ \text{ or } \ (\forall i) R_{\alpha,i}$$

<u>構成 $(A, p_\alpha, f_{\alpha,i})$</u>

stage $s = 0$　$A_0 = \emptyset$ として，すべての α，i について $r(\alpha, i, 0) = 0$ とおく．

stage $s + 1$　各 $e \leq s$ について次のような step を順に行う．$\alpha = \delta_s \upharpoonright (2e)$ とする．

<u>step 1</u>　　$k = \delta_s(2e-2)$ とおく．(すべての s について$\delta_s(-2) = 0$ とする．)

$|\beta| = 2e$ で $\beta > \alpha$ ならばすべての i に対して β^i-gap を放棄して，さらに $r(\beta, i, s+1) = 0$ とする．

<u>step 2</u>　　s が e-expansionary でなければ step 3 へ進む．次に stage $v < s$ で開かれた $|\beta| = 2e$ である β^i-gap があって，その gap がまだ閉じられたり放棄されていなければ，その gap を閉じ $p_\beta(t) = s$ (ただし $t \leq v, t \notin \text{dom}(p_\beta)$) と決め，$r(\beta, i, s+1) = s+1$ とする．

<u>step 3</u>　$s' = \max\{t < s : r(\alpha, t) = k$ とする．存在しなければ $s' = 0$ とする．次の条件を満たす最小の i を選ぶ．

(1)　$R_{\alpha,i}$ がまだ満たされていない．

(2)　$(\exists x)(\exists y)[\ x \in W_{i,s} - W_{i,s'}\ \ \&\ \ y \in \mathrm{dom}(\{e\}_s^{B_s}) - \mathrm{dom}(f_{\alpha,i,s})$
$\&\ \ l(\alpha, s) > y\ \ \&\ \ \tilde{u}_y < x]$

ここで $\tilde{u}_y = \tilde{u}(B_s; e, y, s) = \max\{u(B_s; e, y', s) : y' \leq y\}$ とする．このような i に対して最小の y をとり $f_{\alpha,i} = \{e\}_s^{B_s}(y)$ としてα^i-gap を開き，i 以上のすべての j に対して $r(\alpha, j, s+1) = 0$ とする．

<u>step 4</u>　step 3 までで定義されていないすべての $r(\beta, i, s+1)$ を $r(\beta, i, s)$ とする．そして，

$$\delta_s(2e) = \tilde{r}(e, s+1) \stackrel{def}{=} \max\{r(\beta, i, s+1) : \beta \leq \alpha\ \ \&\ \ |\beta| \leq 2e\ \ \&\ \ i \leq s\}$$

と決める．次に，$\gamma = \delta_s \restriction (2e+1)$ として，

$$\delta_s(2e+1) = \begin{cases} 0 & \text{if } |C_s^{[e]}| > |C_t^{[e]}|\ \ \&\ \ t \text{ は } s \text{ 以下の最大の } \gamma\text{-stage} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と決める．

<u>step 5</u>　次の条件を満たす y が存在するならば最小のものをとって A にいれる．

$$C_s^{[e]} - A_s^{[e]} \neq \emptyset$$
$$(\exists y)[y \in C_s^{[e]} - A_s^{[e]}\ \ \&\ \ y > \tilde{r}(e, s+1)]$$

最後に，$A = \bigcup_s A_s$ として構成を終える．

<u>補題 1 (true path lemma)</u>

次のような $f \in [T]$ が存在する．

$$(1)\ (\forall n)[f \restriction n = \liminf_s \delta_s \restriction n]$$
$$(2)\ (\forall e)[f(2e) = r(e) \stackrel{def}{=} \liminf_s \tilde{r}(e, s) < \infty]$$
$$(3)\ (\forall e)[f(2e+1) = 0 \Longleftrightarrow |C^{[e]}| = \infty$$
$$f(2e+1) = 1 \Longleftrightarrow |C^{[e]}| < \infty$$

証明　(1),(2),(3) を同時に帰納法で示す．$e \geq 0$ を固定して $\alpha = f \upharpoonright (2e)$ とする．$n = 2e$ に対して (1) が成り立ち，e 以下の e' に対して (2),(3) が成り立っていると仮定する．B が promptly simple degree を持たなければ，$R_{\alpha,i}$ が満たされない i が存在することから，その中の最小の i を選ぶ．$k = \liminf_s \tilde{r}(e-1,s)$ とする．

α^i-gap が stage s で開かれるとき，

$$\tilde{r}(e,s) = \max(\{k\} \cup \{r(\beta,i',s) : |\beta| = 2e \ \ \& \ \ \beta < \alpha \ \ \& \ \ i', i\}$$

となる．α^i-gap は無限回開かれるから，$\liminf_s \tilde{r}(e,s) < \infty$ となる．したがって，$n = 2e+1$ に対して (1) が成り立ち e に対して (2) が成り立つ．

$\gamma = f \upharpoonright (2e+1)$ とする．$C^{[e]}$ が有限ならばほとんどすべての s で $\delta_s(2e+1) = 1$ となる．$|C^{[e]}| = \infty$ ならば無限個 γ-stage があるから，$\delta_s \supseteq \gamma\hat{\ }\langle 0\rangle$ となる s も無限個ある．どちらの場合も $n = 2e+2$ に対して (1) が成り立ち e に対して (3) が成り立つ．

補題 2　すべての e について P_e が成り立つ．

証明　補題 1 により $r = \liminf_s \tilde{r}(e,s) < \infty$ であるから，r より大きい $C^{[e]}$ の元はすべて $A^{[e]}$ に入れられる．$C^{[e]} = \omega^{[e]}$ であれば $A^{[e]} =^* \omega^{[e]}$ となる．$C^{[e]} \supseteq A^{[e]}$ であるから $C^{[e]}$ が有限であれば $A^{[e]}$ も有限となる．

補題 3　すべての e について N_e は満たされる．

証明　e を固定し，e 未満のすべての e' で満たされているとする．補題 1 より $f(2e-2) = \liminf_s \tilde{r}(e-1,s) < \infty$ であるから，$k = f(2e-2)$ とおく．今，$\{e\}^A = \{e\}^B$ が全域的であると仮定し，$\alpha = f \upharpoonright 2e$ とする．B が promptly simple degree を持たないことから，W_i が無限集合であって $R_{\alpha,i}$ が満たされない最小の i をとる．$R_{\alpha,i}$-gap は無限個あり，p_α，$f_{\alpha,i}$ は全域的となり，したがって帰納的関数である．

$\{e\}^B \equiv_T f_{\alpha,i}$ を示すために，s_0 以上のすべての s で次の条件を満たす s_0 をとる．

(I)　$|\beta| = 2e$ で $\beta < \alpha$ であるか，$i' < i$ であるならば，$R_{\beta,i}$-gap は開いたり閉じたりしない．

(II)　$\alpha(2j) = 1$ となる e 以下の j に対して，$W_j = W_{j,s_0}$ である．

$f_{\alpha,i}(y) = z$ が s_0 以降の stage $s+1$ で定義されたとする．s 以上の v についての帰納法で次の (1),(2) のいずれかが成り立っていることを示す．

(1)　$$\{e\}_v^{B_v}(y) = z$$

(2)　$$\{e\}_v^{A_v}(y) = z$$

$R_{\alpha,i}$-gap が stage $s+1$ で開かれてから，stage $t+1$ で閉じられるまでは，B が promptly simple degree を持つことから

$$B_s \upharpoonright \tilde{u}_y = B_t \upharpoonright \tilde{u}_y$$

である．したがって，$s \leq v \leq t$ となる v に対しては (1) が成り立つ．t は e-expansionary であるから $\{e\}_t^{A_t}(y) = \{e\}_t^{B_t}(y) = z$ である．$\{e\}_t^{A_t}$ の計算は α-correct であるから，e より小さい j に対しては $\omega^{[j]}$ の元で $u(A_t; e, y, t)$ より小さい元は stage $t+1$ 以降 A に入れられない．e 以上の j に対しては，$\omega^{[j]}$ の元で $\tilde{r}(e, t+1)$ より小さい元は $t+1$ 以降次に $R_{\alpha,i}$-gap が開かれる stage s_1 まで入れられることはない．どちらの場合でも，$t \leq v \leq s_1$ となる v に対して (2) が成り立つことになる．よって，s 以上の v に対して (1),(2) のいずれかが成り立つ．

系 3.5　**a** が minimal pair をなすことのできる degree ならば，その pair の相手を high degree とすることができる．

証明　K. Ambos-Spies et al. [1984] より r.e. degree が promptly simple degree でなければ minimal pair をなすことができるから定理 3.4 より明らかである．

参考文献

1. K. Ambos-Spies, C. G. Jockusch, Jr., R. A. Shore, R. I. Soare, *An algebraic decomposition of the recursively enumerable degrees and the coincidence of several degree classes with the promptly simple degrees*, Trans. Amer. Math. Soc. **281** (1984), 109-128.
2. R. M. Friedberg, *Two recursively enumerable sets of incomparable degrees of unsolvability*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **43** (1957), 236-238.
3. A. H. Lachlan, *Lower bound for pairs of recursively enumerable degrees*, London Math. Soc. **16** (1966), 537-569.
4. W. Maass, R. A. Shore, M. Stob, *Splitting properties and jump classes*, Israel J. Math. **39** (1981), 210-224.
5. A. A. Muchnik, *On the unsolvability of the problem of reducibility in the theory of algorithms*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, N.S. **108** (1956), 194-197.
6. R. W. Robinson, *Jump restricted interpolation in the recursively enumerable degrees*, Ann. of Math.(2) **93** (1971), 586-596.
7. R. I. Soare, *Tree arguments in recursion theory and the* $\mathbf{0}'''$*-priority method*, Recusion Theory Proc. Symp. Pure Math. **42** (1985), 53–106.
8. R. I. Soare, *Recusively Enumerable Sets and Degrees*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1987).
9. C. E. Yates, *A minimal pair of recursively enumerable degrees*, J. Symbolic Logic **31** (1966), 159-168.